山形大学紀要（工学）第17巻　第1号　昭和57年1月
Bull. of Yamagata Univ., Eng., Vol. 17, No. 1, Jan. 1982

分布定数ー集中定数結合系における最適フィルター問題

北　嶋　龍　雄

工業短期大学部・情報工学科

（昭和56年9月1日受理）

1．まえがき

1960年，R. E. Kalman による論文[1]が発表されて以来，集中定数系ならびに分布定数系の状態推定問題に関して，数多くの研究がなされている。分布定数系に対するフィルターは集中定数系と同様に，Wiener－Hopf 理論[2]～[5]，最小二乗法[6]～[8]，特性関数[9]，イノベーション定理[10]～[12]などの手法を用いて求められる。集中定数系のダイナミックスは常微分方程式であらわされるが，分布定数系のダイナミックスは，本来，偏微分方程式であらわされる。文献（5）（6）では，確率微分方程式を無限次元空間内で定式化し数学的に厳密な議論を展開している。しかし，一般には確率偏微分方程式論など数学的な理由から，フィルター方程式などの導出がある程度形式的にならざるをえない場合も多い。

実際の分布定数系制御問題を考える場合，温度，濃度などの状態は，直接的というよりは，なんらかの補助的な機構を通して制御されている。たとえば，加熱炉内の温度制御を行なう場合，燃料流量などにより，一次遅れ系を通して制御が行なわれている。このような一次遅れ系は，多く，常微分方程式であらわされる。すなわち，分布定数系を考える場合，ダイナミックスが偏微分方程式と常微分方程式であらわされる結合系としてとらえるほうが，より合理的であると思われる。

ここでは，線形放物形偏微分方程式と常微分方程式であらわされる結合系に対する最適状態推定問題を考察する。結合系フィルター問題に関する論文としては，文献（8）（15）などがあげられる。そこでは，Lagrange 定数を用いて，原問題を最適制御問題に変換後，二点境界値問題からフィルター方程式を求めている。しかし，かなりやっかいな計算を必要とする。本研究では，結合系の状態変数を一つにまとめ，新しい状態変数を定義する。この新しい拡張分布定数系に対して，Wiener-Hopf 理論を適用することによって，より容易にフィルター方程式，共分散方程式を求めることができる。

2．問題の定式化

図1に示すような一次元分布定数系と，その両端において結ばれている集中定数系から成る結合系を考える。空間変数は簡単のため一次元とするが，多次元への拡張は容易である。

分布定数系，集中定数系のダイナミックスは，次のような二階線形放物形偏微分方程

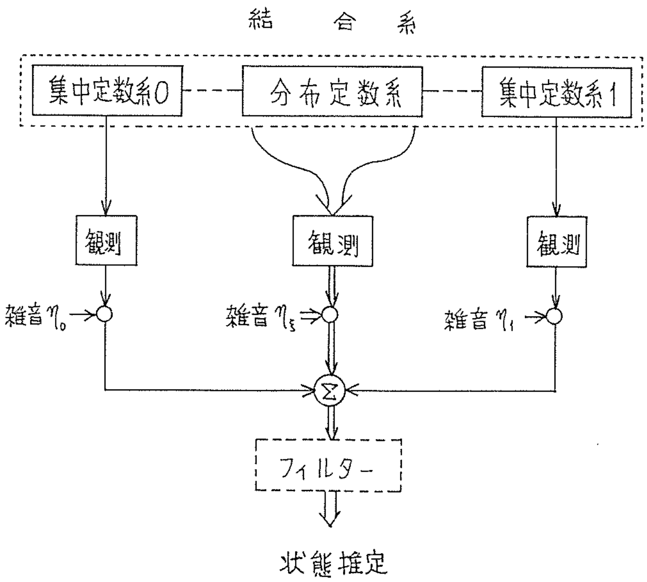

図1　分布定数ー集中定数結合系におけるフィルター問題

式，常微分方程式によって表わされるものとする。

$$\frac{\partial \xi(t,s)}{\partial t}=L_s[\xi(t,s)]+D(t,s)v(t,s), \qquad s_0 \leq s \leq s_1 \tag{1}$$

$$L_s[\cdot]=\frac{\partial}{\partial s}\left((Q(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\right)[\cdot]+Q_c(t,s)[\cdot]$$

$$\dot{x}_0=F_0(t)x_0(t)+G_0(t)\xi(t,s_0)+K_0(t)u_0(t) \tag{2}$$

$$\dot{x}_1=F_1(t)x_1(t)+G_1(t)\xi(t,s_1)+K_1(t)u_1(t) \tag{3}$$

また，境界条件，初期条件はそれぞれ次のように与えられるものとする。

境界条件：

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \xi}{\partial s}\right|_{s=s0}=H_0(t)\xi(t,s_0)+M_0(t)x_0(t)+N_0(t)w_0(t) \\ \left.\dfrac{\partial \xi}{\partial s}\right|_{s=s1}=H_1(t)\xi(t,s_1)+M_1(t)x_1(t)+N_1(t)w_1(t) \end{cases} \tag{4}$$

初期条件：

$$\begin{cases} \xi(t_0,s)=\xi^0(s) \\ x_0(t_0)=x_0{}^0,\ x_1(t_0)=x_1{}^0 \end{cases} \tag{5}$$

ここに，$\xi(t,s)$ は k 次元分布定数状態ベクトル関数，$x_i(t)$，$i=0,1$，は n_i 次元集中定数状態ベクトル関数，$v(t,s)$，$u_i(t)$，$i=0,1$，はシステム雑音をあらわし p 次元，q_i 次元ベクトル白色 Gauss 雑音，$w_i(t)$，$i=0,1$，は境界雑音で r_i 次元ベクトル白色 Gauss 雑音をあらわす。それらの一次，二次モーメントは次のように与えられる。

$$E[v(t,s)]=0,\ E[u_i(t)]=0,\ E[w_i(t)]=0\quad (i=0,1) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &E[v(t,s)v^T(\tau,\sigma)]=V(t,s,\sigma)\delta(t-\tau)\\ &E[u_i(t)u_i^T(\tau)]=U_i(t)\delta(t-\tau)\\ &E[w_i(t)w_i^T(\tau)]=W_i(t)\delta(t-\tau)\qquad (i=0,1)\end{aligned} \tag{7}$$

ただし，E[・]は期待値を求める作用素，^{T}はベクトル，行列の転置をあらわす。$V(t,s,\sigma)$ $U_i(t)$，$W_i(t)$は，tあるいはsに関して連続微分可能な，対称非負定値行列*) とし，

$$V(t,s,\sigma)=V(t,\sigma,s) \tag{8}$$

が成り立つものとする。また，$Q(t,s)$，$Q_c(t,s)$，$D(t,s)$，$G_i(t)$，$F_i(t)$，$K_i(t)$，$H_i(t)$，$M_i(t)$，$N_i(t)$，$i=0,1$，は対応する次元をもつ既知行列とする。$\xi^0(s)$，x_i^0 も Gauss 性確率ベクトルであり，その一次二次モーメントが，以下のように与えられるとする。

$$E[\xi^0(s)]=0,\ E[x_i^0]=0\qquad (i=0,1) \tag{9}$$

$$E[\xi^0(s)\xi^{0T}(s)]=P_0(s,\sigma),\ E[x_i^0x_i^{0T}]=Q_i\qquad (i=0,1) \tag{10}$$

図1に示す結合系に対する観測機構は，いろいろ考えられるが，ここでは，次の形の観測機構をとりあげる。

$$Y(t,s)=A_\xi(t,s)\xi(t,s)+\sum_{i=0}^{1}A_i(t)x_i(t)+B_\xi(t,s)\eta_\xi(t,s)+\sum_{i=0}^{1}B_i(t)\eta_i(t) \tag{11}$$

ここに $\eta_\xi(t,s)$，$\eta_i(t)$，$i=0,1$，はα次元，β_i 次元白色 Gauss 性観測雑音をあらわし，その一次二次モーメントは次のように与えられるものとする。

$$E[\eta_\xi(t,s)]=0,\ E[\eta_i(t)]=0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &E[\eta_\xi(t,s)\eta_\xi^T(\tau,\sigma)]=R(t,s,\sigma)\delta(t-\tau)\\ &E[\eta_i(t)\eta_{i}^T(\tau)]=R_i(t)\delta(t-\tau)\qquad (i=0,1)\end{aligned} \tag{13}$$

$R(t,s,\sigma)$，$R_i(t)$ は対称正定値行列であり，

$$R(t,s,\sigma)=R(t,\sigma,s) \tag{14}$$

とする。さらに，システム雑音 $v(t,s)$，$u_i(t)$，$w_i(t)$ と観測雑音 $\eta_\xi(t,s)$，$\eta_i(t)$ は互いに独立とし，それらは初期雑音 $\xi^0(s)$，x_i^0 とも独立であるとする。

以上のように定式化された結合系の状態変数 $\xi(t,s)$，$x_0(t)$，$x_1(t)$ を一つにまとめ，新しい状態変数 $X(t,s)$ を定義する：

$$X(t,s)=\begin{bmatrix}\xi(t,s)\\ x_0(t)\\ x_i(t)\end{bmatrix} \tag{15}$$

---

*) 行列関数 $V(t,s,\sigma)$ は任意の $X(t,s)$，$s\varepsilon[s_0,s_1]$ に対して次の不等式が成立するとき，非負定値といわれる：

$$\int_{s_0}^{s_1}\int_{s_0}^{s_1}X^T(t,s)V(t,s,\sigma)X(t,\sigma)dsd\sigma\geqq 0$$

不等号のみの場合は，正定値という。

また，システム雑音，境界雑音および観測雑音もまとめ一つのベクトルであらわす。

$$V(t,s)=\begin{bmatrix} v(t,s) \\ u_0(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix},\quad W(t)=\begin{bmatrix} w_0(t) \\ w_1(t) \end{bmatrix},\quad Z(t,s)=\begin{bmatrix} \eta_\xi(t,s) \\ \eta_0(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix} \tag{16}$$

新しい行列偏微分作用素 $\mathcal{L}_s[\cdot]$ を次のように定義する：

$$\mathcal{L}_s[\cdot]=\begin{bmatrix} L_s[\cdot] & 0 & 0 \\ G_0(t)\int_s \delta(s-s_0)[\cdot]ds & F_0(t) & 0 \\ G_1(t)\int_s \delta(s-s_1)[\cdot]ds & 0 & F_1(t) \end{bmatrix} \tag{17}$$

ただし，積分区間Sは区間 $[s_0 s_1]$ を含むとする。さらに各係数をまとめ，新しい係数行列，ベクトルを定義する。

$$\mathbf{D}(t,s)=\begin{bmatrix} D(t,s) & 0 & 0 \\ 0 & K_0(t) & 0 \\ 0 & 0 & K_1(t) \end{bmatrix},\quad \mathbf{\Gamma}_i(t)=\begin{bmatrix} H_i(t) & M_i(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i=0,1)$$

$$\mathbf{N}_0(t)=\begin{bmatrix} N_0(t) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{N}_1(t)=\begin{bmatrix} 0 & N_1(t) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$A(t,s)=[A_\xi(t,s),\ A_0(t),\ A_1(t)]$$

$$B(t,s)=[B_\xi(t,s),\ B_0(t),\ B_1(t)]$$

$$X_0(s)=\begin{bmatrix} \xi^0(s) \\ x_0^0 \\ x_1^0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

したがって，結合系（1）～（5）式および観測機構（11）式は，次のような拡張偏微分方程式系および拡張観測方程式であらわされることになる。

$$\frac{\partial X(t,s)}{\partial t}=\mathcal{L}_s[X(t,s)]+\mathbf{D}(t,s)V(t,s) \tag{20}$$

境界条件：

$$\left.\frac{\partial X(t,s)}{\partial s}\right|_{s=s_i}=\mathbf{\Gamma}_i(t)X(t,s_i)+\mathbf{N}_i(t)W(t) \quad (i=0,1) \tag{21}$$

初期条件：

$$X(t_0,s)=X_0(s) \tag{22}$$

$$Y(t,s)=A(t,s)X(t,s)+B(t,s)Z(t,s) \tag{23}$$

新しいシステム雑音，境界雑音，観測雑音（16）式に対する一次，二次モーメントは，（6），（7），（12），（13）式より，以下のように与えられる。

$$E[V(t,s)]=0,\quad E[W(t)]=0,\quad E[Z(t,s)]=0 \tag{24}$$

$$E[V(t,s)V^T(\tau,\sigma)]=\begin{bmatrix} V(t,s,\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & U_0(t) & 0 \\ 0 & 0 & U_1(t) \end{bmatrix}\delta(t-\tau)=C_V(t,s,\sigma)\delta(t-\tau) \tag{25}$$

$$E[W(t)W^T(\tau)]=\begin{bmatrix} W_0(t) & 0 \\ 0 & W_1(t) \end{bmatrix}\delta(t-\tau)=C_W(t)\delta(t-\tau) \tag{26}$$

$$E[Z(t,s)Z^T(\tau,\sigma)]=\begin{bmatrix} R(t,s,\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & R_0(t) & 0 \\ 0 & 0 & R_1(t) \end{bmatrix}\delta(t-\tau)=C_Z(t,s,\sigma)\delta(t-\tau) \tag{27}$$

明らかに，$C_V(t,s,\sigma)$ は対称非負定値行列，$C_Z(t,s,\sigma)$ は対称正定値行列，かつ

$$C_V(t,s,\sigma)=C_V(t,\sigma,s) \tag{28}$$

$$C_Z(t,s,\sigma)=C_Z(t,\sigma,s) \tag{29}$$

が成立する。

拡張偏微分方程式系 (20)～(23) 式に対して次の二つの仮定をする。

（i） (20)～(22) 式の解が存在し一意である。

(ii) (20)，(21) 式の基本解行列 $\Phi(t,s;\tau,\sigma)$ が存在し，それを用いて (20)，(21) 式の解 $X(t,s)$ が以下のように書きあらわせる。

$$\Phi(t,s;\tau,\sigma)=\Phi(t,\sigma;\tau,s) \tag{30}$$

$$\Phi(t,s;t,\sigma)=I\delta(s-\sigma) \tag{31}$$

$$\frac{\partial\Phi(t,s;\tau,\sigma)}{\partial t}=L_s[\Phi(t,s;\tau,\sigma)] \tag{32}$$

境界条件：

$$\left.\frac{\partial\Phi(t,s;\tau,\sigma)}{\partial s}\right|_{s=s_i}=\Gamma_i\Phi(t,s_i;\tau,\sigma)\quad(i=0,1) \tag{33}$$

$$\begin{aligned} X(t,s)=&\int_{s_0}^{s_1}\Phi(t,s;t_0,\sigma)X_0(\sigma)d\sigma+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s_1}\Phi(t,s;\tau,\sigma)\mathbf{D}(\tau,\sigma)V(\tau,\sigma)d\sigma d\tau \\ &+\int_{s_0}^{t}(\Phi(t,s;\tau,s_0)\mathbf{N}_0(\tau)+\Phi(t,s;\tau,s_1)\mathbf{N}_1(\tau))W(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{34}$$

仮定 (i)，(ii) は次章において共分散方程式を導くときに用いられる。$G_0(t)=0$，$G_1(t)=0$，状態変数が各スカラーの場合，ある条件のもとで仮定 (i)，(ii) が実際に満たされることを示すことができる。

3. 最適推定問題

ここで扱かう結合系状態推定問題は，区間 $t_0\leq\tau<t$，$s_0\leq s\leq s_1$ の観測データ $Y(\tau,s)$ をもとに，時刻 t における状態 $X(t,s)$ の推定値を求めるフィルター問題である。通常の分布定数系の場合と同様に，状態推定値 $X(t,s)$ が観測データの線形変換であらわされるものとする。

$$X(t,s)=\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s_1}L(t,s;\tau,\sigma)\,Y(\tau,\sigma)d\sigma d\tau \tag{35}$$

また，積分核 $L(t,s;\tau,\sigma)$ が t と s に関し微分可能であるとする。このとき，積分核 $L(t,s;\tau,\sigma)$ が推定誤差 $X(t,s)$ の分散を最小にするならば，推定値 $X(t,s)$ は最適推定値とよばれる。すなわち，

$$\tilde{X}(t,s)=X(t,s)-\hat{X}(t,s) \tag{36}$$

に対して

$$E[\tilde{X}(t,s)^{T}\tilde{X}(t,s)]=E[(X(t,s)-\hat{X}(t,s))^{T}(X(t,s)-\hat{X}(t,s))]\rightarrow\text{最小} \tag{37}$$

とする核 $L(t,s;\tau,\sigma)$ を求めることが問題である。

最適推定に関して，(20)～(23) 式の拡張偏微分方程式系に対しても，次の Wiener-Hopf の定理[2][3] が成り立つことは容易に示される。

[Wiener-Hopf の定理]

推定値 $X(t,s)$ が最適であるための必要十分条件は，次の Wiener-Hopf の方程式を満たすことである：

$$E[\tilde{X}(t,s)Y^{T}(\tau,\sigma)]=0,\quad t_0\leq\tau<t,\ s_0\leq s\leq s_1,\ s_0\leq\sigma\leq s_1$$

すなわち　(38)

$$\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s_1}L(t,s;\tau',s')E[Y(\tau',s')Y^{T}(\tau,\sigma)]ds'd\tau'=E[X(t,s)Y^{T}(\tau,\sigma)] \tag{39}$$

この定理にもとずいて，以下にフィルター方程式，共分散方程式を求めていくが，記述を簡略化するため，空間変数区間 $[s_0,s_1]$ を $[0,1]$ のように変えておく。

3.1　フィルター方程式の導出

(39) 式両辺を t で微分し，(20) 式を用いて整理する。

$$\begin{aligned}&\int_0^1 L(t,s;t,s')E[Y(t,s')Y^{T}(\tau,s)]ds'+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\frac{\partial L(t,s;\tau',s')}{\partial t}E[Y(\tau',s')Y^{T}(\tau,s)]ds'd\tau'\\&\quad=E\left[\frac{\partial X(t,s)}{\partial t}Y^{T}(\tau,\sigma)\right]\\&\quad=L_s[E[X(t,s)Y^{T}(\tau,\sigma)]]+\mathbf{D}(t,s)E[V(t,s)Y^{T}(\tau,\sigma)]\end{aligned} \tag{40}$$

時間区間 $t_0\leq\tau<t$ においては，$E[V(t,s)Y^{T}(\tau,\sigma)]=0$ であることから，(40) 式は再び (39) 式を用いて，次のように書きなおせる。

$$\begin{aligned}&\int_0^1 L(t,s;t,s')E[Y(t,s')Y^{T}(\tau,s)]ds'\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\int_0^1\left(\frac{\partial L(t,s;\tau',s')}{\partial t}-L_s[L(t,s;\tau',s')]\right)E[Y(\tau',s')Y^{T}(\tau,\sigma)]ds'd\tau'=0\end{aligned} \tag{41}$$

一方，(23) 式より

$$E[Y(t,s')Y^{T}(\tau,\sigma)]=A(t,s')E[X(t,s')Y^{T}(\tau,\sigma)]+B(t,s')E[Z(t,s')Y^{T}(\tau,\sigma)] \tag{42}$$

を得る。$t_0\leq\tau<t$ においては，$E[Z(t,s')X^{T}(\tau,\sigma)]=0$，$E[Z(t,s')Z^{T}(\tau,\sigma)]=0$ であるから (42) 式右辺第二項は 0 となる。

(39) 式を用いると，(42) 式は次のようになる。

$$E[Y(t,s')Y^T(\tau,\sigma)]=A(t,s')\int_{t_0}^{t}\int_0^1 L(t,s';\tau',s'')E[Y(\tau',s'')Y^T(\tau,\sigma)]ds''dt' \qquad (43)$$

(43) 式を (41) 式に代入する。

$$\int_{t_0}^{t}\int_0^1\left\{\frac{\partial L(t,s;\tau',s')}{\partial t}-L_s[L(t,s;\tau',s')]+\int_0^1 L(t,s;t,s'')A(t,s'')L(t,s'';\tau',s')ds''\right\}$$
$$\times E[Y(\tau',s')Y^T(\tau,\sigma)]ds'd\tau'=0 \qquad (44)$$

(44) 式左辺 { } 内を $K(t,s;\tau',s')$ とおく。(23) 式および観測雑音の独立性より

$$E[Y(\tau',s')Y^T(\tau,\sigma)]=E[Y(\tau',s')X^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma)+B(\tau',s')E[Z(\tau',s')Z^T(\tau,\sigma)]B^T(\tau,\sigma)$$
$$=A(\tau',s')E[X(\tau',s')X^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma)+B(\tau',s')C_Z(\tau',s',\sigma)B^T(\tau,\sigma)\delta(\tau'-\tau) \qquad (45)$$

をえる。(45) 式を (44) 式に代入し両辺右側から $K^T(t,s;\tau,\sigma)$ をかけ，τ,σ について積分する。

$$0=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\int_0^1\int_0^1 K(t,s;\tau',s')A(\tau',s')E[X(\tau',s')X^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma)K^T(t,s;\tau,\sigma)ds'd\sigma d\tau'd\tau$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\int_0^1\int_0^1 K(t,s;\tau',s')B(\tau',s')C_Z(\tau',s',\sigma)B^T(\tau,\sigma)K^T(t,s;\tau,\sigma)\delta(\tau'-\tau)ds'd\sigma d\tau'd\tau$$
$$(46)$$

(46) 式両辺の trace をとり，整理する。

$$0=E\left[\left(\int_{t_0}^{t}\int_0^1 K(t,s;\tau,\sigma)A(\tau,\sigma)X(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\right)^T\left(\int_{t_0}^{t}\int_0^1 K(t,s;\tau,\sigma)A(\tau,\sigma)X(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\right)\right]$$
$$+\mathrm{trace}\int_{t_0}^{t}\int_0^1\int_0^1 K(t,s;\tau,s')B(\tau,s')C_Z(\tau,s',\sigma)B^T(\tau,\sigma)K(t,s;\tau,\sigma)ds'd\sigma d\tau \qquad (47)$$

(47) 式右辺第一項は非負，第二項 $C_Z(\tau,s,\sigma)$ は正定値であるから，結局，

$$K(t,s;\tau,s')B(\tau,s')\equiv 0 \qquad (48)$$

をえる。両辺右から $B^T(\tau,s')$ をかけたとき，$B(\tau,s')B^T(\tau,s')>0$ であることから，

$$K(t,s;\tau,s')\equiv 0 \qquad (49)$$

となる。すなわち，最適核のみたすべき次の方程式がえられる。

$$\frac{\partial L(t,s;\tau,\sigma)}{\partial t}=L_s[L(t,s;\tau,\sigma)]-\int_0^1 L(t,s;t,s')A(t,s')L(t,s';\tau,\sigma)ds' \qquad (50)$$

(35) 式をtで微分し，(50) 式を用いて整理する。

$$\frac{\partial\hat{X}(t)}{\partial t}=\int_0^1 L(t,s;t,\sigma)Y(t,\sigma)d\sigma+\int_{t_0}^{t}\int_0^1\frac{\partial L(t,s;\tau,\sigma)}{\partial t}Y(\tau,\sigma)d\sigma d\tau$$
$$=L_s[X(t,s)]+\int_0^1 L(t,s;t,\sigma)[Y(t,\sigma)-A(t,\sigma)\hat{X}(t,\sigma)]d\sigma \qquad (51)$$

一方，推定誤差の共分散 $P(t,s,\sigma)$ を定義する。

$$P(t,s,\sigma)=E[\tilde{X}(t,s)\tilde{X}^T(t,\sigma)] \qquad (52)$$

明らかに $P(t,s,\sigma)$ は次の性質をもつ。

$$P(t,s,\sigma)=P^T(t,\sigma,s) \qquad (53)$$

観測雑音の独立性より

$$E[X(t,s)Y^T(\tau,\sigma)]=E[X(t,s)X^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma) \tag{54}$$

がえられる。(45)，(54) 式を (39) 式に代入し整理すると次式がえられる。

$$\int_0^1 L(t,s;\tau,s')B(\tau,s')C_Z(\tau,s',\sigma)B^T(\tau,\sigma)ds'=E[\tilde{X}(t,s)X^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma)$$
$$=E[\tilde{X}(t,s)\tilde{X}^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma)+E[\tilde{X}(t,s)\hat{X}^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma) \tag{55}$$

(38) 式より，(55) 式右辺第二項は0となる。すなわち，

$$\int_0^1 L(t,s;\tau,s')B(\tau,s')C_Z(\tau,s',\sigma)B^T(\tau,\sigma)ds'=E[\tilde{X}(t,s)\tilde{X}^T(\tau,\sigma)]A^T(\tau,\sigma) \tag{56}$$

連続性より $\tau\to t$ とし，(52) 式を用いて

$$\int_0^1 L(t,s;t,s')B(t,s')C_Z(t,s',\sigma)B^T(t,\sigma)ds'=P(t,s,\sigma)A^T(t,\sigma) \tag{57}$$

をえる。いま，ある行列関数 R(t,s,s′) の一般化逆行列を R*(t,s,s′) であらわす。ただし，その定義式は次式で与えられる[13]。

$$\int_0^1 R(t,s,s')R^*(t,s',\sigma)ds'=I\delta(s-\sigma) \tag{58}$$

このとき，(57) 式より，最適核が

$$L(t,s;t,\sigma)=\int_0^1 P(t,s,s'')A^T(t,s'')[B(t,s'')C_Z(t,s'',\sigma)B^T(t,\sigma)]^*ds'' \tag{59}$$

で与えられることは，容易にわかる。(59) 式を (50) 式に代入することにより，最適推定値のみたすべきフィルター方程式は，次のようになる。

$$\frac{\partial\hat{X}(t,s)}{\partial t}=L_s[X(t,s)]+\int_0^1\int_0^1 P(t,s,s')A^T(t,s')[B(t,\sigma)C_Z(t,s',\sigma)B^T(t,s')]^*$$
$$\times[Y(t,\sigma)-A(t,\sigma)\hat{X}(t,\sigma)]d\sigma \tag{60}$$

(60) 式に対する境界条件を求める。(39) 式において $s=s_i$ とし，左から $\Gamma_i(t)$ をかける。

$$\int_{t_0}^t\int_0^1 \Gamma_i(t)L(t,s_i;\tau',s')E[Y(\tau',s')Y^T(\tau,\sigma)]ds'd\tau'=E[\Gamma_i(t)X(t,s_i)Y^T(\tau,\sigma)] \quad (i=0,1) \tag{61}$$

また，(39) 式を s で微分し，$s=s_i$ とおく。

$$\int_{t_0}^t\int_0^1 \frac{\partial L(t,s;\tau',s')}{\partial s}\bigg|_{s=s_i}E[Y(\tau',s')Y^T(\tau,\sigma)]ds'd\tau'=E\left[\frac{\partial X(t,s)}{\partial s}\bigg|_{s=s_i}Y^T(\tau,\sigma)\right](i=0,1) \tag{62}$$

(62) 式から (61) 式を辺々引き算し (21) 式を代入する。このとき $t_0\leq\tau<t$ においては $E[W(t)Y^T(\tau,\sigma)]=0$ となることから，結局次の等式が成り立つ。

$$\int_{t_0}^t\int_0^1\left\{\frac{\partial L(t,s;\tau',s')}{\partial s}\bigg|_{s=s_i}-\Gamma_i(t)L(t,s;\tau',s')\right\}E[Y(\tau',s')Y^T(\tau,\sigma)]ds'd\tau'=0 \tag{63}$$

(44) 式から (49) 式を得たときと同様の議論により，最適核に関する次の境界条件がえられる。

$$\frac{\partial L(t,s;\tau',s')}{\partial s}\bigg|_{s=s_i}-\Gamma_i(t)L(t,s_i;\tau',s')=0 \quad (i=0,1) \tag{64}$$

よって，(60) 式に対する境界条件は，

$$\frac{\partial\hat{X}(t,s)}{\partial s}\bigg|_{s=s_i}=\Gamma_i(t)\hat{X}(t,s_i) \quad (i=0,1) \tag{65}$$

となる。ここに，$s_0=0$，$s_1=1$である。初期条件は，(35) 式より，

$$X(t,s)=0,\quad s\varepsilon[0,1] \tag{66}$$

である。

3.2 共分散方程式の導出

(52) 式を両辺 t で微分する。

$$\frac{\partial P(t,s,\sigma)}{\partial t}=E\left[\frac{\partial\tilde{X}(t,s)}{\partial t}\ \tilde{X}^T(t,\sigma)\right]+E\left[\tilde{X}(t,s)\frac{\partial\tilde{X}^T(t,\sigma)}{\partial t}\right] \tag{67}$$

(67) 式第一項は，(36)，(60) 式を用いて，次のようにあらわせる。

$$\begin{aligned}E\left[\frac{\partial\tilde{X}(t,s)}{\partial t}\tilde{X}^T(t,\sigma)\right]=&L_s[E[\tilde{X}(t,s)\tilde{X}^T(t,\sigma]+\mathbf{D}(t,s)\cdot E[V(t,s)\tilde{X}^T(t,\sigma)]\\&-\int_0^1\int_0^1 P(t,s,s')A^T(t,s')[B(t,s)C_Z(t,s',\sigma)B^T(t,\sigma')]^*E[(Y(t,\sigma')\\&\qquad -A(t,\sigma')\hat{X}(t,\sigma))\tilde{X}^T(t,\sigma)]d\sigma'ds'\end{aligned} \tag{68}$$

右辺第二項を，システム雑音，境界雑音，観測雑音，初期雑音が独立であること，および，(34)，(25)，(31) 式を用いて変形する。

$$\begin{aligned}E[V(t,s)\tilde{X}^T(t,\sigma)]&=E[V(t,s)X^T(t,\sigma)]-E[V(t,s)\hat{X}^T(t,\sigma)]\\&=\{E[X(t,\sigma)V^T(t,s)]\}^T\\&=\left\{\int_{t_0}^t\int_0^1\Phi(t,\sigma;\tau,\sigma')\mathbf{D}(\tau,\sigma')C_V(t,\sigma',s)\delta(t-\tau)d\sigma'd\tau\right\}^T\\&=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1\Phi(t,\sigma;t,\sigma')\mathbf{D}(t,\sigma')C_V(t,\sigma',s)d\sigma'\right\}^T\\&=\frac{1}{2}C_V(t,\sigma,s)\mathbf{D}^T(t,\sigma')\end{aligned} \tag{69}$$

さらに (68) 式右辺第三項積分内の E[•] 項を，(38) 式，観測雑音の独立性を用いて整理する。

$$\begin{aligned}E[(Y(t,\sigma')-A(t,\sigma')\hat{X}(t,\sigma'))\ \tilde{X}^T(t,\sigma)]&=E[Y(t,\sigma')\tilde{X}^T(t,\sigma)]-A(t,\sigma')E[\hat{X}(t,\sigma')\tilde{X}^T(t,\sigma)]\\&=A(t,\sigma')E[\tilde{X}(t,\sigma')\tilde{X}^T(t,\sigma)]+B(t,\sigma')E[Z(t,\sigma')\tilde{X}^T(t,\sigma)]\\&=A(t,\sigma')P(t,\sigma',\sigma)-B(t,\sigma')E[Z(t,\sigma')\hat{X}^T(t,\sigma)]\end{aligned} \tag{70}$$

(35)，(27) 式，観測雑音の独立性より，右辺第二項は次のように変形される。

$$\begin{aligned}B(t,\sigma')E[Z(t,\sigma')\hat{X}^T(t,\sigma)]&=B(t,\sigma')\int_{t_0}^t\int_0^1 E[Z(t,\sigma')Y^T(\tau,s)]L^T(t,\sigma;\tau,s)dsd\tau\\&=B(t,\sigma')\int_{t_0}^t\int_0^1 E[Z(t,\sigma')Z^T(\tau,s)]B^T(\tau,s)L^T(t,\sigma;\tau,s)dsd\tau\\&=B(t,\sigma')\int_{t_0}^t\int_0^1 C_Z(t,\sigma',s)\delta(t-\tau)B^T(\tau,s)L^T(t,\sigma;\tau,s)dsd\tau\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 B(t,\sigma')C_Z(t,\sigma',s)B^T(t,s)L^T(t,\sigma;t,s)ds\\&=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 L(t,\sigma;t,s)B(t,s)C_Z(t,s,\sigma')B^T(t,\sigma')ds\right\}^T\end{aligned} \tag{71}$$

(59)，(58) 式を用いてさらに変形する。

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1\int_0^1 P(t,\sigma,s')A^T(t,s')[B(t,s')C_Z(t,s',s)B^T(t,s)]^*(B(t,s)C_Z(t,s,\sigma')B^T(t,\sigma'))\,ds\,ds'\right\}^T$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 P(t,\sigma,s')A^T(t,s')I\cdot\delta(s'-\sigma')ds'\right\}^T$$
$$=\frac{1}{2}A(t,\sigma')P^T(t,\sigma,\sigma') \qquad (72)$$

（72）式を（71）式に代入して，

$$E[(Y(t,\sigma')-A(t,\sigma')\hat{X}(t,\sigma'))\tilde{X}^T(t,\sigma)]=A(t,\sigma')P(t,\sigma',\sigma)+\frac{1}{2}A(t,\sigma')P^T(t,\sigma,\sigma') \qquad (73)$$

をえる。

（69），（73）式を（68）式に代入することより，（67）式右辺第一項は次のようになることがわかる。

$$E\left[\frac{\partial\tilde{X}(t,s)}{\partial t}\tilde{X}^T(t,\sigma)\right]=L_s[P(t,s,\sigma)]+\frac{1}{2}\mathbf{D}(t,s)C_V(t,\sigma,s)\mathbf{D}^T(t,\sigma)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 P(t,s,s')A^T(t,s')[(Bt,s')C_Z(t,s',\sigma')B^T(t,\sigma')]^*A(t,\sigma')P(t,\sigma',\sigma)d\sigma'ds' \qquad (74)$$

全く同様に（67）式右辺第二項も計算されるが

$$E\left[\tilde{X}(t,s)\frac{\partial\tilde{X}^T(t,\sigma)}{\partial t}\right]=\left\{E\left[\frac{\partial\tilde{X}^T(t,\sigma)}{\partial t}\tilde{X}^T(t,s)\right]\right\} \qquad (75)$$

の関係式から，（74）式から直接求めることができる。すなわち，（53）式，および，（58）式の定義から $R^T(t,s,s')=R(t,s',s)$ ならば $[R^*(t,s',\sigma)]^T=R^*(t,\sigma,s')$ となることを用いると，容易に次式がえられる。

$$E\left[\tilde{X}(t,s)\frac{\partial\tilde{X}^T(t,\sigma)}{\partial t}\right]=\{L\sigma[P(t,\sigma,s)]+\frac{1}{2}\mathbf{D}(t,\sigma)C_V(t,s,\sigma)\mathbf{D}^T(t,s)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 P(t,\sigma,s')A^T(t,s')[B(t,s')C_Z(t,s',\sigma')B^T(t,\sigma')]^*A(t,\sigma')P(t,\sigma',s)d\sigma'ds'\}^T$$
$$=\{L\sigma[P(t,\sigma,s)]\}^T+\frac{1}{2}\mathbf{D}(t,s)C_V(t,s,\sigma)\mathbf{D}^T(t,\sigma)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 P(t,s,s')A^T(t,s')[B(t,s')C_Z(t,s',\sigma')B^T(t,s')]^*A(t,\sigma')P(t,s',\sigma)d\sigma'ds' \qquad (76)$$

ここで $L\sigma[\cdot]$ は変数 σ に関する（17）式の行列偏微分作用素をあらわす。（74），（76）式を（67）式に代入することによって，最適フィルターに対する共分散方程式が求められる。

$$\frac{\partial P(t,s,\sigma)}{\partial t}=L_s[P(t,s,\sigma)]+\{L\sigma[P(t,s,\sigma)]\}^T+\mathbf{D}(t,s)\mathbf{C}_V(t,s,\sigma)\mathbf{D}^T(t,\sigma)$$
$$-\int_0^1\int_0^1 P(t,s,s')A^T(t,s')[B(t,s')C_Z(t,s',\sigma')B^T(t,s')]^*A(t,\sigma')P(t,\sigma',\sigma)d\sigma'ds' \qquad (78)$$

（78）式に対する境界条件をもとめる。（21），（65）式より

$$\left.\frac{\partial\tilde{X}(t,s)}{\partial s}\right|_{s=s_i}=\mathbf{\Gamma}_i(t)\tilde{X}(t,s_i)+\mathbf{N}_i(t)W(t) \qquad (i=0,1) \qquad (79)$$

である。（52）式を s で微分し，$s=s_i$ とおき，（79），（26），（34）式を用いることによって，次式がえられる。

$$\left.\frac{\partial P(t,s,\sigma)}{\partial s}\right|_{s=s_i}=\mathbf{\Gamma}_i(t)E[\tilde{X}(t,s_i)\tilde{X}(t,\sigma)]+\mathbf{N}_i(t)E[W(t)\tilde{X}^T(t,\sigma)]$$

$$=\Gamma_i(t)P(t,s_i,\sigma)+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\mathbf{N}_i(t)C_W(t)\mathbf{N}_j^T(t)\delta(\sigma-s_i)\quad(i=0,1)\tag{80}$$

これは，空間座標 s に関する（78）式の境界条件である。同様に，空間座標 σ に関する境界条件も次のように求められる。

$$\left.\frac{\partial P(t,\sigma,s)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=s_i}=\Gamma_i(t)P(t,s_i,s)+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\mathbf{N}_i(t)C_W(t)\mathbf{N}_j^T(t)\delta(s-s_i)\quad(i=0,1)\tag{81}$$

また，初期条件は（10）式より

$$P(t_0,s,\sigma)=\begin{bmatrix}P_0(s,\sigma) & 0 & 0\\ 0 & Q_0 & 0\\ 0 & 0 & Q_1\end{bmatrix}\tag{82}$$

で与えられる。

4．結合系のフィルター方程式と共分散方程式

前章で求めた拡張偏微分方程式系に対するフィルター方程式，共分散方程式を，もとの分布定数系，集中定数系の状態変数であらわす。(15)，(52) 式より，$P(t,s,\sigma)$ は，実際には次のような形をしている。

$$P(t,s,\sigma)=E\left[\begin{pmatrix}\tilde{\xi}(t,s)\\ \tilde{x}_0(t)\\ \tilde{x}_1(t)\end{pmatrix}(\tilde{\xi}^T(t,\sigma),\tilde{x}_0^T(t),\tilde{x}_1^T(t))\right]$$

$$=\begin{bmatrix}E[\tilde{\xi}(t,s)\tilde{\xi}^T(t,\sigma)], & E[\tilde{\xi}(t,s)\tilde{x}_0^T(t)], & E[\tilde{\xi}(t,s)\tilde{x}_1^T(t)]\\ E[\tilde{x}_0(t)\tilde{\xi}^T(t,\sigma)], & E[\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_0^T(t)], & E[\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_1^T(t)]\\ E[\tilde{x}_1(t)\tilde{\xi}^T(t,\sigma)], & E[\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_0^T(t)], & E[\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_0^T(t)]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}P_{\xi\xi}(t,s,\sigma)P_{\xi 0}(t,s)P_{\xi 1}(t,s)\\ P_{0\xi}(t,\sigma)\quad P_{00}(t)\quad P_{01}(t)\\ P_{1\xi}(t,\sigma)\quad P_{10}(t)\quad P_{11}(t)\end{bmatrix}\tag{83}$$

ただし，$P_{\xi\xi}(t,s)$，$P_{00}(t)$，$P_{11}(t)$……等の各共分散は対応する要素によって定義されるものとする。各共分散は次の性質をもつことは明らかである。

$$\begin{aligned}&P_{\xi\xi}(t,s,\sigma)=P_{\xi\xi}^T(t,\sigma,s)\\ &P_{i\xi}(t,\sigma)=P_{\xi i}^T(t,\sigma)\\ &P_{ii}(t)=P_{ii}^T(t)\\ &P_{10}(t)=P_{01}^T(t)\end{aligned}\qquad(i=0,1)\tag{84}$$

以下の表示を簡単にするため

$$\mathbf{R}^*(t,s',\sigma')=[B(t,s')C_Z(t,s',\sigma')B^T(t,s')]^*$$

$$=[B_\xi(t,\sigma)R(t,s',\sigma)B^T(t,s')+\sum_{j=1}^{0}B_j(t)R_j(t)B_j^T(t))]^*\tag{85}$$

とおく。

(i) 結合系フィルター方程式

（60），（65），（66）式より，次のように書きあらわせる。

$$\frac{\partial\hat{\xi}(t,s)}{\partial t}=Ls[\hat{\xi}(t,s)]+\int_0^1\int_0^1(P_{\xi\xi}(t,s,s')A_\xi^T(t,s')+\sum_{j=0}^{1}P_{\xi 0}(t,s)A_j(t))\cdot\mathbf{R}^*(t,s',\sigma')$$

$$\times[Y(t,\sigma)-A_\xi(t,\sigma)\hat{\xi}(t,\sigma)-\sum_{j=1}^{1}A_j(t)\hat{x}_j(t)]ds'd\sigma \tag{86}$$

$$\frac{\partial\hat{x}_i(t)}{dt}=F_i(t)\hat{x}_i(t)+G_i(t)\hat{\xi}(t,s_i)+\int_0^1\int_0^1(P_{i\xi}(t,s)A_\xi^T(t,s')+\sum_{j=0}^{1}P_{ij}(t)A_j(t))\cdot\mathbf{R}^*(t,s',\sigma')$$

$$\times[Y(t,\sigma)-A_\xi(t,\sigma)\hat{\xi}(t,\sigma)-\sum_{j=1}^{1}A_j(t)\hat{x}_j(t)]ds'd\sigma \tag{87}$$

境界条件：

$$\left.\frac{\partial\hat{\xi}(t,s)}{\partial s}\right|_{s=s_i}=H_i(t)\hat{\xi}((t,s_i)+M_i(t)\hat{x}_i(t) \qquad (i=0,1) \tag{88}$$

初期条件：

$$\hat{\xi}(t_0,s)=0,\ \hat{x}_i(t_0)=0 \qquad (i=0,1) \tag{89}$$

（ii）結合系共分散方程式

（78），（81），（82）および（83）式を用いて，次のように求められる。

$$\frac{\partial P_{\xi\xi}(t,s,\sigma)}{\partial t}=Ls[P_{\xi\xi}(t,s,\sigma)]+\{L\sigma[P_{\xi\xi}(t,\sigma,s)]\}^T+D(t,s)V(t,s,\sigma)D^T(t,\sigma)$$

$$-\int_0^1\int_0^1(P_{\xi\xi}(t,s,s')A_\xi^T(t,s')+\sum_{j=0}^{1}P_{\xi j}(t,s)A_j^T(t))\mathbf{R}^*(t,s',\sigma')$$

$$\times(A_\xi(t,\sigma')P_{\xi\xi}(t,\sigma',\sigma)+\sum_{j=0}^{1}A_j(t)P_{j\xi}(t,\sigma))d\sigma'ds' \tag{90}$$

$$\frac{\partial P_{\xi i}(t,s)}{\partial t}=Ls[P_{\xi i}(t,s)]+\{L_\sigma P_{\xi i}(t,\sigma)\}^T$$

$$-\int_0^1\int_0^1(P_{\xi\xi}(t,s,s')A_\xi^T(t,s')+\sum_{j=0}^{1}P_{\xi j}(t,s)A_j^T(t))\mathbf{R}^*(t,s',\sigma')$$

$$\times(A_\xi(t,\sigma')P_{\xi i}(t,\sigma')+\sum_{j=0}^{1}A_j(t)P_{ji}(t))d\sigma'ds' \qquad (i=0,1) \tag{91}$$

$$\frac{dP_{ii}(t)}{dt}=F_i(t)P_{ii}(t)+G_i(t)P_{\xi i}(t,s_i)+P_{ii}^T(t)F_i^T(t)+P_{\xi i}^T(t,s_i)G_i^T(t)+K_i(t)U_i(t)K_i^T(t)$$

$$-\int_0^1\int_0^1(P_{i\xi}(t,s')A_\xi^T(t,s')+\sum_{j=0}^{1}P_{ij}(t)A_j^T(t))\mathbf{R}^*(t,s',\sigma')$$

$$\times(A_\xi(t,\sigma')P_{\xi i}(t,\sigma')+\sum_{i=0}^{1}A_j^T(t)P_{ji}(t))d\sigma'ds' \qquad (i=0,1) \tag{92}$$

$$\frac{dP_{01}(t)}{dt}=F_0(t)P_{01}(t)+G_0(t)P_{\xi 1}(t,s_0)+P_{01}^T(t)F_0^T(t)+P_{\xi 1}^T(t,s_0)G_0^T(t)$$

$$-\int_0^1\int_0^1(P_{0\xi}(t,s')A_\xi^T(t,s')+\sum_{j=0}^{1}P_{0j}(t)A_j^T(t))\mathbf{R}^*(t,s'\sigma')$$

$$\times(A_{\xi}(t,\sigma')P_{\xi 1}(t,\sigma')+\sum_{j=0}^{1}A_{j}(t)P_{j1}(t))d\sigma' ds' \tag{93}$$

境界条件：

$$\left.\frac{\partial P_{\xi\xi}(t,s,\sigma)}{\partial s}\right|_{s=s_0}=H_0(t)P_{\xi\xi}(t,s_0,s)+M_0(t)P_{0\xi}(t,s_0)+\frac{1}{2}N_0(t)W_0(t)N_0^T(t)\delta(s-s_0)$$

$$\left.\frac{\partial P_{\xi\xi}(t,s,\sigma)}{\partial s}\right|_{s=s_1}=H_1(t)P_{\xi\xi}(t,s_1,s)+M_1(t)P_{0\xi}(t,s_1)+\frac{1}{2}N_1(t)W_1(t)N_1^T(t)\delta(s-s_1) \tag{94}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\xi i}(t,s)}{\partial s}\right|_{s=s_0}=H_0(t)P_{\xi 0}(t,s_0)+M_0(t)P_{0i}(t)+\frac{1}{2}N_0(t)W_0(t)N_0^T(t)\delta(s-s_0)$$

$$(i=0,1) \tag{95}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\xi i}(t,s)}{\partial s}\right|_{s=s_0}=H_1(t)P_{\xi 0}(t,s_1)+M_1(t)P_{0i}(t)+\frac{1}{2}N_0(t)W_0(t)N_0^T(t)\delta(s-s_1)$$

（σ に関する境界条件も同様に求められるが，ここでは省略する。）

初期条件：

$$P_{\xi\xi}(t_0,s,a)=P_0(s,a),\quad P_{ii}(t_0)=Q_i \qquad (i=0,1) \tag{96}$$

$$P_{\xi i}(t_0,s)=0 \qquad (i=0,1)\ ,\ P_{01}(t_0)=0$$

(iii) 特別な場合

ここにえられた結合系フィルター方程式，結合系共分散方程式から，特別な場合として，分布定数系，集中定数系それぞれのフィルター方程式をえることができる。
すなわち，

$$G_i(t)=M_i(t)=0 \qquad (i=0,1)$$

とおくことにより，$A_i(t)=B_i(t)=0$ の場合は，分布定数系フィルター，$A_{\xi}(t,s)=B_{\xi}(t,s)=0$ の場合は，集中定数フィルターが求められている。

5. あとがき

連続時間形分布定数，集中定数結合系に対するフィルター問題を考察した。離散時間形[4]結合系に対しても同様の議論ができる。分布定数系をはじめ，結合系制御問題においては，すべての場合を含む問題の定式化は不可能である。そのため一般的な結合系フィルターは存在せず，個々の問題に応じて，文献あるいは自分で求めなければならない。ここでは，実際問題に即した一つの結合系数学モデルに対して，各サブシステムの状態変数をまとめ新しい状態変数を定義した。新しい状態変数に対してフィルターを導き，そのあともとの状態変数に戻す本手法は，多くの場合，見通しのよいフィルター導出法のように思われる。

えられるフィルター方程式，共分散方程式の複雑さは初めの数学モデルにも依存する。このフィルターを実際問題へ適用する場合，もちろん計算機にたよらざるをえない。今後，フィルターの安定性などの研究とともに，フィルター方程式の解をもとめるより有効なアルゴリズムの開発が必要である。

参考文献

1）Kalman, R. E.; A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 82, 35/45, 1960

2）Tzafestas, S. G. & J. M. Nightingale; Optimal Filtering, Smoothing and Prediction in Linear Distributed-Parameter Systems, Proc. IEE, Vol. 115, 1207/1212, 1968

3）Sakawa, Y.; Optimal Filtering in Linear Distributed-Parameter Systems, Int. J. Control, Vol. 16, 115/127, 1972

4）Nagamine, H, S. Omatsu & T. Soeda; The Optimal Filtering Problem for a Discrete-Time Distributed Parameter System, Int. J. Systems Sci., Vol. 10, 735/749, 1979

5）Falb, P. L.; Infinite Dimensional Filtering : Kalman Bucy Filter in Hilbert Space, Information Control, Vol. 11, 102/137, 1967

6）Balakrishnan, A. V. & J. L. Lions; State Estimationon for Infinite Dimensional Systems, J. Computer Systems Sci. Vol. 1, 391/403, 1967

7）Meditch, J. S.; Least-square Filtering and Smoothing for Linear Distributed-Parameter Systems, Automatica, Vol. 7, 315/822, 1971

8）Ajinkya, M. B., W. H. Ray, T. K. Yn & J. H. Seinfeld; The Application of an Approximate Non-linear Filter to Systems Governd by Coupled Ordinary and Partial Differential Equations; Int. J. Systems Sci., Vol. 6, 313/332, 1975

9）Tzafestas, S. G. & J. M. Nightingale; Concerning Optimal Filtering Theory of Linear Distributed-Parameter Systems, Proc. IEE, Vol. 115, 1737/1742, 1968

10）Tzafestas, S. G.; On Optimum Distributed-Parameter Filtering and Fixed Interval Smoothing for Colored Noise, IEEE Trans. A. C., Vol. 17, 448/458, 1972

11）Atre, S. R. & S. S. Lamba; Optimal Estimation in Distributed Procosses Using the Innovations Approach, IEEE Trans. A. C., Vol. 17, 710/716, 1972

12）Atre, S. R. & S. S. Lamba; Filtering for Linear Distributed-Parameter Systems via Boundary Measurments; Proc. IEE, Vol. 119, 757/759, 1972

13）Tzafestas, S. G.; Distributed Parameter State Estimation, Distributed Parameter Systems-Identification, Estimation, and Control' (editated by W. H. Ray), 135/208, 1978

14）Bencala, K. E. & J. H. Seinfeld; Distributed Parameter Filtering; Boundary Noise and Discrete observations, Int. J. Systems Sci., Vol. 10, 493/512, 1979

15）Hwang, M., J. H. Seinfeld & G. R. Garalas; Optimal Least Square Filtering and Interpolation in Distributed-Parameter Systems, J. Math. Anal. Appl., Vol. 39, 49/59, 1972

16）Yu, T. K., J. H. Seinfeld & Harmon Ray; Filtering in Nonlinear Time Delay Systems, IEEE Trans. A. C., Vol. 19, 324/333, 1974

On Optimum Filtering for the Systems Coupled Distributed and Lumped Parameter Systems

Tatsuo KITAJIMA

Department of Computer Engineering, Technical Junior College

This paper deals with the optimal filtering problem for the systems governed by coupled parabolic partial and ordinary differential equations.

In order to derive the filter and covariance equations, the states of each subsystem are collected. So the original coupled systems are converted to one system described by the extended partial differential equations. Based on Wiener-Hopf theory, the filter equations for the new extended systems are firstly derived. Then the filter equations for the original coupled systems are obtained by separating those equations.

Using this method, the filter equations for the coupled system may be more easily derived.